Studiul oscilaţiilor amortizate pe model electric

1 Consideraţii teoretice

Mişcarea oscilatorie constă în variaţia periodică sau aproape periodică, în timp şi/sau în spaţiu, a mărimilor caracteristice ale unui sistem fizic, mişcare însoţită de transformarea energiei sistemului dintr-o formă în alta, adică energia cinetică în energie potenţială şi invers. Vom considera pentru studiul acestui tip de mişcare un sistem mecanic şi un sistem electric.

Pentru început considerăm un sistem mecanic constând într-un pendul fizic (un corp de masă m suspendat prin intermediul unui resort de constantă elastică k de un punct fix) (Figura 1), sistem ce se poate deplasa pe verticala punctului de suspensie, în sus şi în jos. Interacţiunea sistemului cu mediul exterior, pe de o parte, respectiv energia disipată în resort în decursul comprimării şi alungirii acestuia, pe de altă parte, poate fi descrisă printr-o forţă de frecare proporţională cu viteza, $F = -rv$, unde r este o constantă reală pozitivă. În decursul deplasării de o parte şi de alta a poziţiei de echilibru a corpului de masă m, datorită forţei de frecare, amplitudinea mişcării scade. Făcând bilanţul forţelor implicate, conform cu principiul al patrulea al dinamicii, obţinem:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -r\frac{dx}{dt} - kx \tag{1}$$

Trecem toţi termenii în stânga semnului egal şi obţinem ecuaţia a cărei soluţie descrie această mişcare oscilatorie amortizată:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2}$$

Înmulţim această ecuaţie cu $\frac{1}{m}$ şi obţinem

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3}$$

unde $\delta = \frac{r}{2m}$ se numeşte *factor de amortizare*, iar $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ se numeşte *pulsaţie proprie*. Avem trei situaţii în funcţie de raportul dintre δ şi ω_0 ($\delta \lesseqqgtr \omega_0$).

În continuare vom considera situaţia $\delta < \omega_0$ situaţie pentru care soluţia ecuaţiei (3) este

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi) \tag{4}$$

unde A_0 este amplitudinea mişcării oscilatorii armonice, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ este pulsaţia mişcării oscilatorii amortizate, iar φ este faza iniţială a mişcării. Ecuaţia de mişcare (3) descrie mişcarea oscilatorie amortizată a corpului de masă m în condiţiile considerate şi este reprezentată în Figura 2. Raportul elongaţiilor sau al amplitudinilor la un interval de timp egal cu perioada mişcării oscilatorii amortizate, $T' = \frac{2\pi}{\omega}$, este

$$\frac{x(t)}{x(t+T')} = \frac{A_0 e^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi)}{A_0 e^{-\delta(t+T')}\sin(\omega(t+T') + \varphi)} = e^{\delta T'} \tag{5}$$

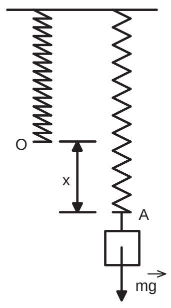

Figura 1

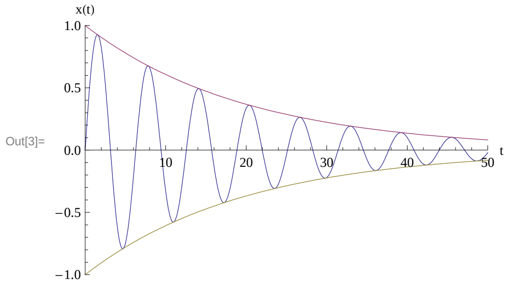

Figura 2

Logaritmul natural al acestui raport se numeşte *decrement logaritmic*,

$$\Delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T')} \tag{6}$$

şi este o măsură a gradului de amortizare a oscilaţiilor sau o măsură a energiei disipate în decursul mişcării oscilatorii.

Combinând ecuaţiile (5) şi (6) obţinem pentru decrementul logaritmic expresia

$$\Delta = \delta T'. \tag{7}$$

În continuare vom considera un circuit constituit dintr-un condensator de capacitate C alimentat cu tensiune dreptunghiulară, condensator ce se poate descărca pe o grupare formată dintr-un rezistor de rezistenţă variabilă R (potenţiometru) şi o bobină de inductanţă L (Figura 3).

Scriem legea I a lui Kirchoff pentru unul dintre cele două noduri ale circuitului, sus sau jos, şi obţinem ecuaţia

$$i_C + i_L + i_R = 0. \tag{8}$$

Înlocuind expresiile pentru fiecare dintre cei trei curenţi obţinem

$$C\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}\int u dt + \frac{u}{R} = 0 \tag{9}$$

unde u este tensiunea instantanee de la bornele grupării. Diferenţiind încă odată în raport cu timpul obţinem o ecuatie similară ecuaţiei (2)

$$C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt} + \frac{1}{L}u = 0. \tag{10}$$

Înmulţim această ecuaţie cu $\frac{1}{C}$ şi obţinem

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{11}$$

ecuaţie similară ecuaţiei (3). Introducem notaţia $\tau = RC$, care se numeşte *constanta de timp* a circuitului, iar ecuaţia (11) devine

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{12}$$

Identificăm termenii corespunzătorii din ecuaţiile (2) şi (10), respectiv ecuaţiile (3) şi (11) obţinem corespondenţele din tabelul de mai jos:

sistem mecanic	m	r	k	$\frac{r}{m}$	ω^2
sistem electric	C	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{L}$	$\frac{1}{RC}$	$\frac{1}{LC}$

În mod analog cu ecuaţia (3) obţinem şi soluţia ecuaţiei (12)

$$u(t) = U_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin(\omega t + \varphi) \tag{13}$$

unde $U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{2\tau}}$ constituie “amplitudinea“ oscilaţiei ce scade exponenţial în timp. Această atenuare a oscilaţiei se datorează rezistenţei R.

Pentru acest sistem decrementul logaritmic este dat de expresia

$$\Delta = \ln \frac{U(t)}{U(t+T')}$$

de unde

$$\Delta = \frac{T'}{2RC} = \frac{T'}{2\tau}$$

2 Prezentarea instalaţiei experimentale

Instalaţia experimentală este prezentată în Figura 3.

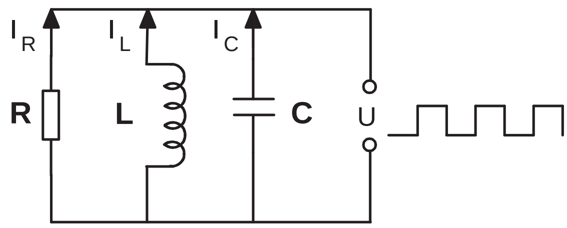

Figura 3

3 Mod de lucru

În această lucrare se va urmări variaţia amplitudinii mişcării oscilatorii în funcţie de rezistenţa din circuit pentru 3 bobine cu miez aer, Cu şi Fe. Se poate proceda în două moduri :

(i) considerăm pe rând fiecare dintre cele trei bobine şi variem rezistenţa electrică din circuit;

(ii) fixăm o valoare a rezistenţei şi schimbăm cele trei bobine.

Intrucât valoarea rezistenţei este de ordinul a 10 $M\Omega$ recomandăm varianta a doua cu observaţia că trebuie să fie întotdeauna şi aceeaşi bobină. Pentru aceasta se va avea grijă ca miezul utilizat să se introducă până la acelaşi reper de fiecare dată (de exemplu capătul miezului ce intră în bobină să fie dus până ajunge în acelaşi plan cu capătul celălalt al carcasei bobinei).

Se va proceda conform următorilor paşi:

1. Se vor efectua reglajele la osciloscop astfel încât imaginea oscilaţiei să fie cât mai bună, să umple ecranul osciloscopului, şi se va proceda pentru fiecare pereche R, L la citirea amplitudinilor $u(t)$, respectiv $u(t+T')$ conform Figurii 4. Se vor citi, în unităţi relative, valorile cele mai mari pentru două maxime succesive ale elongaţiei.

2. Datele obţinute se vor trece în coloanele 3 şi 4 din tabele de mai jos, corespunzătoare fiecărei bobine.

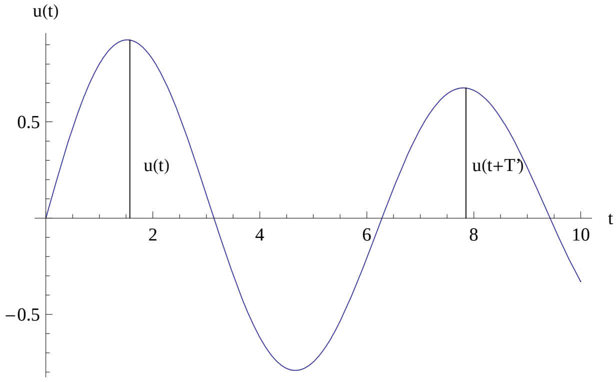

Figura 4

Tabel 1 (miez Cu)

1	2	3	4	5
Nr.crt	$R[M\Omega]$	U(t)	U$(t+T')$	Δ
1	10			
2	9			
3	8			
4	7			
5	6			
6	5			
7	4			
8	3			
9	2			
10	1			

Tabel 2 (miez AER)

1	2	3	4	5
Nr.crt	$R[M\Omega]$	U(t)	U(t+T')	Δ
1	10			
2	9			
3	8			
4	7			
5	6			
6	5			
7	4			
8	3			
9	2			
10	1			

Tabel 3 (miez Fe)

1	2	3	4	5
Nr.crt	$R[M\Omega]$	U(t)	U(t+T')	Δ
1	10			
2	9			
3	8			
4	7			
5	6			
6	5			
7	4			
8	3			
9	2			
10	1			

4 Prezentarea rezultatelor experimentale

1. După efectuarea măsurătorilor se va proceda la completarea coloanei 5 din tabelele de mai sus.

2. Se vor reprezenta pe acelaşi grafic, aceeaşi bucată de hârtie milimetrică sau folosind un soft adecvat, datele din coloana 5 în funcţie de datele din coloana 2 pentru fiecare bobină.

3. Se discută calitativ graficele obţinute.